

Module : MECANIQUE FONDAMENTALE - Mécanique des solides indéformables

Examen du lundi 19 juin 2000 - Durée 2 heures

Sans notes ni calculatrice - Seul un formulaire d'une page recto-verso est autorisé

Je vous propose un seul grand problème, en trois parties. La deuxième partie, qui correspond à un perfectionnement de la première, devra donc être traitée après. La troisième partie est indépendante de la deuxième. Lisez soigneusement l'énoncé, et relisez-vous afin d'éviter des erreurs de calcul!

Barème *indicatif* : **I.** 1) 0,5 point ; 2) 1 point ; 3) 3,5 points ; 4) 11,5 points ; 5) 2,5 points ; 6) 8,5 points.

II. 1) 0,5 point ; 2) 4,5 points ; 3) 7 points ; 4) 2,5 points.

III. 1) 6 points ; 2) 4 points.

La somme des points obtenus sera ensuite ramenée à 20 selon une règle qui sera définie ultérieurement.

Etude d'une éolienne avec auto-régulation mécanique de sa vitesse de rotation

Ce sujet s'inspire d'un projet de troisième année [1] qui pourrait aboutir rapidement à la création d'un nouveau produit destiné à un usage dans des pays en voie de développement, en l'occurrence une éolienne légère à axe vertical avec auto-régulation mécanique de sa vitesse de rotation. Pour permettre une réalisation utilisant des matériaux légers et peu coûteux, donc peu résistants, l'idée est que les pales de l'éolienne, qui se trouvent en fonctionnement normal à la verticale (parallèlement à l'axe de rotation), doivent en cas de vent violent se positionner sous l'effet des forces centrifuges à l'horizontale (« mise en drapeau »). Alors - grâce au choix d'un profil approprié de pales - le couple hydrodynamique dû au vent est réduit, l'éolienne ralentit sa rotation, et tout risque de rupture est évité.

Nous désignons par \mathcal{R}_0 le référentiel absolu galiléen lié au sol, et par \mathcal{R} le référentiel lié aux bras de l'éolienne, qui supportent chacun une pale à leur extrémité. Les bras sont horizontaux et de longueur a . Ils sont fixés sur un axe vertical Oz , de sorte que le champ de gravité terrestre soit $\mathbf{g} = -g\hat{\mathbf{z}}$ avec $g > 0$. Le point O est fixe dans \mathcal{R}_0 . Sous l'effet de l'action du vent sur les pales, \mathcal{R} tourne à une vitesse angulaire Ω par rapport à \mathcal{R}_0 .

L'objet des deux premières parties du problème est d'étudier la dynamique d'une pale dans le référentiel tournant \mathcal{R} , afin d'analyser le principe de la « mise en drapeau » des pales à vitesse de rotation élevée. Pour simplifier l'étude de ces deux premières parties, nous y supposons :

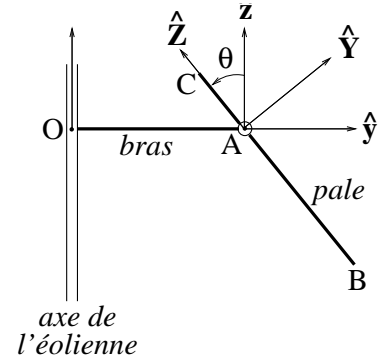
- (a) que le couple dû à l'action du vent sur chaque pale n'a pas de composantes dans le plan horizontal ;
- (b) que le couple vertical dû à l'action du vent sur les pales impose $\mathbf{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}_0} = \Omega\hat{\mathbf{z}}$ avec Ω constant.

Cette étude doit bien sûr être complétée par une analyse de la dynamique de l'éolienne complète, qui sera seulement esquissée dans la troisième partie.

[1] *Dimensionnement d'une éolienne*, Projet de fin d'études de X. Diamant & N. Gachignard, effectué sous la direction de C. Gastchiné & J.-M. Genevaux.

Partie I : Etude de la dynamique d'une pale assimilée à une barre :

Dans cette partie on assimile pour simplifier une pale de l'éolienne à une barre homogène BC de dimensions latérales négligeables et de longueur l . Cette barre est fixée, par une liaison pivot, sur un bras OA de longueur a lui-même solidaire en O de l'axe de rotation Oz. Le paramètre $\alpha \in]0, 1[$ précise la position de A sur BC, de sorte que $BA = \alpha l$ et $AC = (1 - \alpha)l$. La liaison entre le bras et la pale en A permet une rotation d'axe Ax, où \hat{x} est le vecteur unitaire normal à la figure ci-contre. La base $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ est donc liée au bras et au référentiel tournant \mathcal{R} . L'orientation de la pale dans \mathcal{R} est repérée par l'angle θ représenté sur la figure. On associe à la pale une base $\{\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}\}$ telle que $\hat{X} = \hat{x}$, \hat{Y} et \hat{Z} étant représentés sur la figure.



1) Calculer la densité linéique de masse ρ'' permettant de décrire la pale comme une ligne massique de masse totale m .

2) Calculer le vecteur rotation Ω' de la pale par rapport à \mathcal{R} .

3) Calculer le tenseur d'inertie $\bar{\mathbf{I}}(A)$ de la pale au point A dans la base de votre choix. En déduire l'énergie cinétique de la pale dans le référentiel \mathcal{R} .

4) On veut décrire la dynamique de la pale dans le référentiel \mathcal{R} à l'aide du formalisme lagrangien, la coordonnée généralisée permettant de définir l'orientation de la pale étant bien sûr l'angle $q_1 = \theta$.

a) Quelle hypothèse doit-on faire sur la liaison pivot en A pour pouvoir "oublier" les efforts de liaison correspondants ?

b) Montrer que le torseur des efforts dus au poids de la barre se réduit à une force appliquée en un point G que l'on précisera. En déduire la force généralisée Q_1^{poids} due au poids, puis l'énergie potentielle (généralisée) dont dérive cette force généralisée.

c) Calculer le couple $\Gamma^{ie}(A)$ dû aux forces d'inertie d'entraînement exercées sur la pale dans \mathcal{R} du fait de la rotation de \mathcal{R} . En déduire la force généralisée Q_1^{ie} correspondante, puis l'énergie potentielle (généralisée) dont dérive cette force généralisée.

d) Calculer le couple $\Gamma^{ic}(A)$ dû aux forces d'inertie de Coriolis exercées sur la pale dans \mathcal{R} du fait de la rotation de \mathcal{R} . En déduire la force généralisée Q_1^{ic} correspondante, puis l'énergie potentielle (généralisée) dont dérive cette force généralisée.

5) En utilisant le formalisme lagrangien, donner l'équation de la dynamique de la pale dans le référentiel \mathcal{R} . Comment s'interprète cette équation scalaire dans le cadre de la mécanique newtonienne ?

6) Pour simplifier la résolution, on suppose dans cette question uniquement que $a = l$, $\alpha = \frac{2}{3}$.

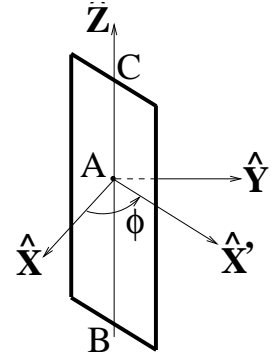
a) En utilisant l comme unité de distance, $1/\Omega$ comme unité de temps et m comme unité de masse, donner la version adimensionnelle de l'équation de la dynamique calculée en 5). On nommera ϵ l'accélération de la pesanteur adimensionnalisée, dont on donnera l'expression.

b) Quelle équation doit-on résoudre, et dans quel intervalle de valeurs de θ , pour déterminer les orientations d'équilibre possibles de la pale ? Effectuer cette résolution, éventuellement de façon graphique. Montrer l'existence de deux orientations d'équilibre possibles θ_+ et θ_- que l'on cernera. Quelles sont les valeurs limites de θ_+ et θ_- à forte vitesse de rotation Ω ?

c) Pour un système lagrangien quelconque à un degré de liberté θ , donner à partir du critère général de stabilité exprimé en utilisant l'énergie potentielle un critère de stabilité exprimé en utilisant la force généralisée Q_1 . Appliquer ce critère pour déterminer ici la stabilité des orientations d'équilibre θ_{\pm} . Conclure.

Partie II : Etude de la dynamique d'une pale assimilée à une plaque :

On veut développer un modèle un peu plus réaliste de pale en l'approximant par une plaque rectangulaire homogène d'épaisseur négligeable. On désigne toujours par $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ la base liée au bras, et par $\{\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}\}$ la base liée à la pale, telle que $\hat{X} = \hat{x}$, $\hat{Y} = \hat{y} \cos \theta + \hat{z} \sin \theta$ et $\hat{Z} = \hat{z} \cos \theta - \hat{y} \sin \theta$, comme sur la figure de la partie I. Dans cette base $\{\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z}\}$, la plaque est disposée comme représenté sur la figure ci-contre. La projection de la pale sur le plan XAY est le segment de longueur $2d$, centré en A, et porté par le vecteur $\hat{X}' = \hat{X} \cos \phi + \hat{Y} \sin \phi$, où l'angle ϕ constant est caractéristique de l'inclinaison de la pale. La plaque est toujours fixée à l'extrémité A du bras par une liaison pivot d'axe Ax (non représentée sur la figure ci-contre). Sur l'axe médian de la plaque, le point A se trouve à une hauteur repérée par le paramètre α tel que $BA = \alpha l$ et $AC = (1 - \alpha)l$ comme précédemment.



1) Calculer la densité surfacique de masse ρ' permettant de décrire la pale comme une plaque massique de masse totale m .

2) Rappeler l'expression du vecteur rotation Ω' de la pale dans \mathcal{R} . Calculer le tenseur d'inertie $\bar{\bar{I}}(A)$ de la pale au point A dans la base de votre choix. En déduire l'énergie cinétique de la pale dans le référentiel \mathcal{R} .

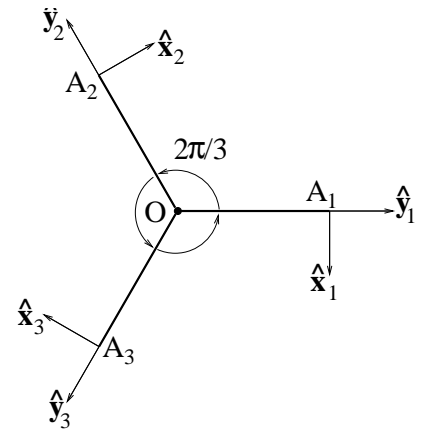
3) On se place dans l'hypothèse donnée en I.4)a) permettant d'utiliser le formalisme lagrangien pour décrire la dynamique de la pale dans le référentiel \mathcal{R} à l'aide de la coordonnée généralisée $q_1 = \theta$.

- Calculer la force généralisée Q_1^{poids} due au poids.
- Calculer la force généralisée Q_1^{ie} due aux forces d'inertie d'entraînement.
- Calculer la force généralisée Q_1^{ic} due aux forces d'inertie de Coriolis.

4) En déduire l'équation de la dynamique de la pale dans le référentiel \mathcal{R} . S'attend t'on a priori à un comportement dynamique différent de celui donné par le modèle de la partie I ?

Partie III : Commencement de l'étude de la dynamique globale de l'éolienne :

L'éolienne est constituée de trois ensembles bras + pale identiques, que l'on suppose pour simplifier décrits par le modèle de la partie I. Ces ensembles sont régulièrement disposés comme représenté sur la figure dans le plan perpendiculaire à \hat{z} ci-contre. On introduit un indice i variant de 1 à 3 pour désigner les points A_i de liaison entre le bras i et la pale i , ainsi que les bases $\{\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}_i\}$ (resp. $\{\hat{X}_i, \hat{Y}_i, \hat{Z}_i\}$) liées au bras i (resp. à la pale i). L'orientation de la pale i par rapport au bras i est repérée par l'angle $\theta_i = \widehat{(\hat{y}_i, \hat{Y}_i)}$.



1) a) Etablir pour un solide quelconque la formule générale permettant de relier son tenseur d'inertie calculé en un point O à celui calculé en un point A.

b) En déduire la contribution de la pale d'indice i à la composante $I_{zz}(O)$ du tenseur d'inertie de l'éolienne au point O.

c) Sachant que les bras peuvent être considérés comme des barres homogènes de dimension latérales négligeables et de masse m' , donner la composante $I_{zz}(O)$ du tenseur d'inertie de l'éolienne au point O.

2) En notant $\Gamma^{vent}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ la composante suivant \hat{z} du couple résultant en O dû à l'action du vent sur les pales, expliciter l'équation qui régit, dans le référentiel \mathcal{R}_0 , l'évolution de la vitesse angulaire Ω de l'éolienne.